

TEMA 8: ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

$$\dim_{\mathbb{R}} V = n, f \in \text{Bil}_s(V), \mathcal{E}(f) = (s, t), M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \overbrace{\quad}^s & & \\ & \underbrace{\quad}_t & \\ & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$s + t = \text{rg}(f)$$

$$\mathcal{E}(f) = (n, 0) \implies M_{\mathcal{B}}(f) = I_n, f \text{ es definida positiva}$$

f es producto escalar si es bilineal, simétrica, definida positiva:

$$\mathbb{R}^n, f(v, w) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, v = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}_c}, w = (y_1, \dots, y_n), \mathcal{B}_c \text{ es ortonormal}$$

$$q(v) = f(v, v) = (x_1 \dots x_n) I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$$

$$q(v) = 0 \iff v = 0$$

(V, f) , f producto escalar sobre V

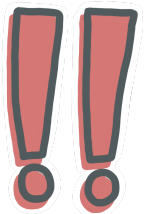
$(V, f), (V', f')$ espacios vectoriales euclídeos

$$\varnothing: V \rightarrow V' \text{ isomorfismo} \implies f'(\varnothing(v), \varnothing(w)) = f(v, w), \forall v, w \in V$$

Teorema

(V, f) y (V', f') espacios vectoriales euclídeos

$$V \text{ y } V' \text{ son isomorfos} \iff \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V'$$

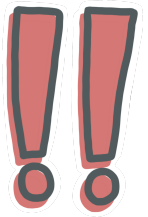


$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal (f)

$\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ base ortonormal (f')

$$\varnothing\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i v'_i$$

$$f(v_i, v_j) = \delta_{ij} \parallel f'(v'_i, v'_j) = \delta_{ij}$$



Teorema

$$f \in B_i/s(V), A = (a_{ij}) = M_B(f), a_{ij} = f(v_i, v_j)$$

$$f \text{ es producto escalar } \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{(definida positiva)} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ii} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \forall i=1, \dots, n \end{matrix}$$

Dem.

\Rightarrow f es definida positiva $\Rightarrow f$ es definida positiva sobre $\underbrace{L(v_1, \dots, v_i)}_{V_i}$

$$M_{\langle v_1, \dots, v_i \rangle} (f|_{V_i \times V_i}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ii} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} \xrightarrow{f|_{V_i \times V_i} \text{ d.p.}} | \cdot | > 0$$

$$g \text{ definida positiva, } M_{B'}(g) = I_n \Rightarrow |M_B(g)| = 1, |M_{B''}(g)| = |P^t I_n P| = |P^2| > 0$$

$$\Leftarrow B = \{v_1, \dots, v_n\}, B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}, f(v'_i, v'_j) = 0, \text{ si } i \neq j$$

$$\text{tal que } L(v_1, \dots, v_n) = L(v'_1, \dots, v'_n)$$

$$\dot{?} f(v'_i, v'_i) > 0?$$

$$v'_i = v_i \quad |a_{11}| > 0$$

$$f(v'_i, v'_i) = f(v_i, v_i) = a_{11} > 0$$

$$W = L(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}) = L(v'_1, \dots, v'_i, v'_{i+1})$$

$f|_{W \times W}$ no diagonal

$$M_{\langle v_1, \dots, v_{i+1} \rangle} (f|_{W \times W}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1, i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1, 1} & \dots & a_{i+1, i+1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow | \cdot | > 0$$

$$L(v'_1, \dots, v'_i)^\perp \subset W \quad \text{sujeto a demostración}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} L(v'_1, \dots, v'_i)^\perp = \text{codim } L(v'_1, \dots, v'_i) = i+1 - i = 1$$

$$\Rightarrow \exists v'_{i+1} \in L(v'_1, \dots, v'_i, v'_{i+1}) \text{ tal que } v'_{i+1} \in L(v'_1, \dots, v'_i)^\perp$$

$$\Rightarrow L(v'_1, \dots, v'_i, v'_{i+1}) = L(v'_1, \dots, v'_i, v'_{i+1}) = W$$

$$\angle f(v_{i+1}, v_{i+1}) > 0?$$

$$M_{\{v'_1, \dots, v'_{i+1}\}}(f|_{W \times W}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1, i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1, 1} & \dots & a_{i+1, i+1} \end{pmatrix}$$

$$M_{\{v'_1, \dots, v'_{i+1}\}}(f|_{W \times W}) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{i+1} \end{pmatrix}, \quad d_1, \dots, d_i > 0$$

$$d_{i+1} = f(v'_{i+1}, v'_{i+1})$$

$$D = P^t C P$$

$$|D| = |P|^2 |C|, \quad d_1, \dots, d_i > 0 \implies d_{i+1} > 0$$

f no degenerada

$\{w_1, \dots, w_n\}$ ortogonales 2 a 2

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0 \implies 0 = f(w_i, \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n) = \lambda_i f(w_i, w_i)$$

Obtención base ortogonal (Método de Gram-Schmidt)

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , V espacio vectorial euclideo, f producto escalar

$$\begin{cases} v'_1 = v_1 \\ v'_2 = v_2 + \lambda_{2,1} v'_1 \\ v'_3 = v_3 + \lambda_{3,2} v'_2 + \lambda_{3,1} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n = v_n + \lambda_{n, n-1} v'_{n-1} + \dots + \lambda_{n,1} v'_1 \end{cases} \quad \lambda_{i,j} \in \mathbb{R}$$

$$0 = f(v'_2, v'_1) = f(v_2 + \lambda_{2,1} v_1, v'_1) = f(v_2, v'_1) + \lambda_{2,1} \underbrace{f(v_1, v'_1)}_0 \implies \text{Despejamos el } \lambda_{2,1} \text{ (valor único)}$$

$$0 = f(v'_3, v'_2) = f(v_3, v'_2) + \lambda_{3,2} f(v'_2, v'_2) + \lambda_{3,1} f(v'_1, v'_2) \implies \text{Despejamos } \lambda_{3,2}$$

$$0 = f(v'_3, v'_1) = f(v_3, v'_1) + \lambda_{3,2} f(v'_2, v'_1) + \lambda_{3,1} f(v'_1, v'_1) \implies \text{Despejamos } \lambda_{3,1}$$

Hacemos lo mismo con todos $\implies B' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ es ortogonal respecto de f

OBS

$$L(v'_1, \dots, v'_i) = L(v_1, \dots, v_i), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Aparte, si tomamos $v_i'' = \frac{v_i'}{[f(v_i', v_i')]^{1/2}}$, $B'' = \{v_1'', v_2'', \dots, v_n''\}$ es ortonormal

MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT

$(f(v_i'', v_i'') = 1)$

Es ortonormal pues $f(v_i'', v_i'') = f\left(\frac{v_i'}{[f(v_i', v_i')]^{1/2}}, \frac{v_i'}{[f(v_i', v_i')]^{1/2}}\right)$

$$= \frac{1}{f(v_i', v_i')} \cdot f(v_i', v_i') = 1$$

$M_{B''}(f) = I_n$

Definición (Módulo de un vector)

f producto escalar

Módulo de $v \equiv \|v\| = \sqrt{f(v, v)} = \sqrt{q(v)} \in \mathbb{R}$

$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$

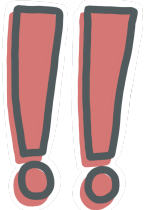
Propiedades del módulo

i) $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \iff v = 0$

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$

Dem: $\sqrt{q(\lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 q(v)} = |\lambda| \cdot \sqrt{q(v)}$

iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ **DESIGUALDAD TRIANGULAR**



Si V es un espacio vectorial y existe $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique estas tres propiedades decimos que es un espacio normado

Proposición (Desigualdad de Schwarz)

f producto escalar $\implies f(v, w)^2 \leq q(v)q(w)$

Dem.

$0 \leq q(v + \lambda w) = q(v) + \lambda^2 q(w) + 2\lambda f(v, w)$ Polinomio real de grado 2 en λ

Para que el polinomio se anule: $v + \lambda w = 0 \implies v = -\lambda w \implies q(a) = 0 \iff a = 0$

Hay máximo una raíz (si v y w son proporcionales)

$\implies \Delta \leq 0 \implies f(v, w)^2 \leq q(v)q(w)$

Dem. iii)

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= q(v+w) = f(v+w, v+w) = q(v) + 2f(v, w) + q(w) \leq q(v) + 2\sqrt{q(v)}\sqrt{q(w)} + q(w) \\ &= (\sqrt{q(v)} + \sqrt{q(w)})^2 = (\|v\| + \|w\|)^2\end{aligned}$$

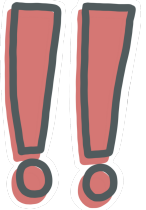
$$\Rightarrow \underline{\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|}$$

OBS (Fórmula del producto escalar de toda la vida)

$$\frac{|f(v, w)|}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{f(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

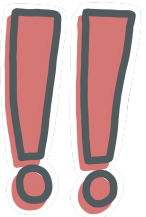
$\cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$ Único

$$\Rightarrow \underline{f(v, w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \theta}$$



Proposición

i) f producto escalar, $W < V \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} W^{\perp} = n - \dim_{\mathbb{R}} W$



Dem.

$\dim W = m$, $\{w_1, \dots, w_m\}$ base de W $f_d: V \rightarrow V^*$
 $w \mapsto f_d(w)$

$$v \in W^{\perp} \iff \begin{cases} 0 = f(v, w_i) = f_d(w_i)(v) = \omega_i \in V^* \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \text{ (Ecuación cartesiana)} \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

\Rightarrow Tenemos m ecuaciones cartesianas

Aemás, f no degenerada $\Rightarrow f_d$ isomorfismo $\Rightarrow m$ ecuaciones cartesianas independientes

$$\Rightarrow \underline{\dim_{\mathbb{R}} W^{\perp} = n - m = \text{codim}_{\mathbb{R}} W}$$

ii) $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

Dem: $f(w, w) = 0 \Rightarrow w = 0$
 $w \in W \cap W^{\perp}$ \uparrow
f.p.e.

Consecuencia

$$V = W \oplus W^\perp$$

$$\text{Dem: } \dim(W + W^\perp) = m + n - m - 0 = n$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 W W^\perp $W \cap W^\perp$

Definición (Endomorfismos autoadjuntos)

(V, f) espacio vectorial euclideo

$\emptyset \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ es autoadjunto (respecto de f) si $f(v, \emptyset(w)) = f(\emptyset(v), w), \forall v, w \in V$

OBS

Sea B base de V

$$A = M_B(\emptyset) \quad \left| \quad v = (x_1, \dots, x_n)_B\right.$$

$$C = M_B(f) \quad \left| \quad w = (y_1, \dots, y_n)_B\right.$$

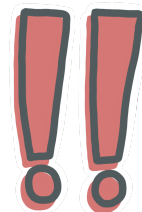
$$(x_1 \dots x_n) A^t C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) C A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \forall v, w \in V$$

$$\Rightarrow \underline{\emptyset \text{ es autoadjunto} \Leftrightarrow A^t \cdot C = C \cdot A}$$

Si B base ortonormal: \emptyset es autoadjunto $\Leftrightarrow A^t = A \Leftrightarrow A$ simétrica

Teorema Espectral

07/04/2021



(V, f) espacio vectorial euclideo.

Si $\emptyset \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ es autoadjunto, entonces existe B base de V ortonormal respecto de f formada por vectores propios (respecto de \emptyset). B diagonaliza a f y \emptyset simultáneamente

Dem.

Supongamos $f = x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ irreducible, $f \nmid q_\emptyset$

Entonces, vemos existe $0 \neq v \in V$ tal que $q_{\emptyset, v} = f$

$q_\emptyset = f^a \cdot g, a \geq 1, f \nmid g \Rightarrow \exists w \in V$ tal que $q_{\emptyset, w} = f^a$ Lema previo a Cayley Hamilton

$$\text{Sea } v = f(\emptyset)^{a-1}(w) \Rightarrow q_{\emptyset, v} | f \Rightarrow \underline{q_{\emptyset, v} = f}$$

→ si fuera n.l.d. $\emptyset(v)$ se anularía en un polinomio de grado 1
 $\pi = L(v, \emptyset(v))$, $\dim_{\mathbb{R}} \pi = 2$, $\pi \subset_{\emptyset} V$ ($\emptyset^2(v) = -a_1 \emptyset(v) - a_0 v$)

$f|_{\pi \times \pi} : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{R}$ es producto escalar

$\psi = \emptyset|_{\pi} : \pi \rightarrow \pi$ es endomorfismo y es autoadjunto respecto de $f|_{\pi \times \pi} = g$

$$M_{\{v, \emptyset(v)\}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Sea $\{w_1, w_2\}$ base ortonormal de g

$$M_{\{w_1, w_2\}}(\psi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ (Simétrica)}$$

$$x^2 + a_1 x + a_0 = p_{\psi} = x^2 - (a+c)x + a \cdot c - b^2$$

Es irreducible $\Rightarrow 0 > \Delta = a_1^2 - 4a_0 = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ ¡ ABSURDO

$$\Rightarrow q_{\emptyset} = (x - \lambda_1)^{a_1} \cdots (x - \lambda_t)^{a_t}, \quad a_i \geq 1$$

Veamos $a_i = 1, \forall i = 1, \dots, t$

Sea $\lambda = \lambda_i, a = a_i$, para cierto i

Veamos $\text{Ker}(\emptyset - \lambda \text{id})^2 \subseteq \text{Ker}(\emptyset - \lambda \text{id})$

$$v \in \text{Ker}(\emptyset - \lambda \text{id})^2$$

$$f(\underbrace{(\emptyset - \lambda \text{id})(v)}_{\text{Endomorfismo autoadjunto}}, (\emptyset - \lambda \text{id})(v)) = f(v, (\emptyset - \lambda \text{id})^2(v)) = f(v, 0) = 0$$

\Rightarrow Como f es producto escalar, $(\emptyset - \lambda \text{id})(v) = 0 \Rightarrow v \in \text{Ker}(\emptyset - \lambda \text{id})$

$$\Rightarrow \text{Ker}(\emptyset - \lambda \text{id})^2 \subseteq \text{Ker}(\emptyset - \lambda \text{id})$$

$\Rightarrow a_1 = \dots = a_t = 1 \Rightarrow \emptyset$ diagonalizable $\Rightarrow \exists B$ base de vectores propios

$B = B_1 \cup \dots \cup B_t$, B_i base de V_{\emptyset, λ_i}

$$p_{\emptyset} = \pm (x - \lambda_1)^{e_1} \cdots (x - \lambda_t)^{e_t} = d \Rightarrow B_i = \{v_{i1}, \dots, v_{id_i}\}$$

Sean $v_i \in B_i, v_j \in B_j, i \neq j$. Veamos que son ortogonales:

$$f(\lambda_i v_i, v_j) = f(\varnothing(v_i), v_j) = f(v_i, \varnothing(v_j)) = f(v_i, \lambda_j v_j)$$

$$\lambda_i f(v_i, v_j) \qquad \qquad \qquad \lambda_j f(v_i, v_j)$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) f(v_i, v_j) = 0 \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_j} f(v_i, v_j) = 0$$

Además, podemos tomar B_i base de $V_{\varnothing, \lambda_i}$ ortonormal respecto de $f|_{V_{\varnothing, \lambda_i} \times V_{\varnothing, \lambda_i}}$

$\Rightarrow B = B_1 \cup \dots \cup B_t$ es ortonormal respecto de f

(pues la restricción sigue siendo producto escalar)

Interpretación matricial



B base ortonormal

$$M_B(f) = I_n, \quad M_B(\varnothing) = \lambda_1 I_{d_1} \oplus \dots \oplus \lambda_t I_{d_t} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_t & \\ 0 & & & \ddots & \lambda_t \end{pmatrix}$$

B diagonaliza simultáneamente a f (por congruencia)

y a \varnothing (por semejanza)

Aparte:

$A \in S_n(\mathbb{R})$ (simétrica)

$\varnothing: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ endomorfismo, (\mathbb{R}^n, \odot) espacio vectorial euclídeo producto escalar usual

B_C ortonormal $\Rightarrow \varnothing$ autoadjunto

$$M_B(\varnothing) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

B_C ortonormal y de vectores propios

$D = P^{-1} \cdot A \cdot P$, $P = M(B, B_C)$ ortogonal ($P^t = P^{-1}$), pues:

$$M_{B_C}(\cdot) = M_B(\cdot) = I_n$$

$$\Rightarrow I_n = P^t I_n P \Rightarrow P^t P = I_n \Rightarrow P^t = P^{-1}$$

↑ por congruencia

$\Rightarrow D = P^{-1} A P = P^t A P \Rightarrow$ La matriz diagonaliza simultáneamente por congruencia y semejanza

Conclusión

Toda matriz real simétrica se puede diagonalizar por congruencia y semejanza (con la misma matriz).

OBS

$\varnothing \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ diagonalizable $\Rightarrow \exists f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ producto escalar tal que

\varnothing es autoadjunto respecto de f



Como encontrarla:

B base de V de vectores propios de \varnothing , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

\Rightarrow Imponemos que $M_B(f) = I_n$

$$f(\varnothing(v_i), v_j) = f(\lambda_i v_i, v_j) = \lambda_i f(v_i, v_j) = \lambda_i \delta_{ij}$$

$$f(v_i, \varnothing(v_j)) = f(v_i, \lambda_j v_j) = \lambda_j f(v_i, v_j) = \lambda_j \delta_{ij}$$

Definición (Aplicación que conserva el producto escalar)

(V, f) e.v.e.

$\varnothing: V \rightarrow V$ conserva f si $f(\varnothing(v), \varnothing(w)) = f(v, w)$, $\forall v, w \in V$

OBS

Si \varnothing conserva f , entonces \varnothing es \mathbb{R} -lineal

Dem.

$$\varnothing(\lambda v) - \lambda \varnothing(v) \stackrel{?}{=} 0$$

$$f(\varnothing(\lambda v) - \lambda \varnothing(v), \varnothing(\lambda v) - \lambda \varnothing(v))$$

$$= f(\varnothing(\lambda v), \varnothing(\lambda v)) + \lambda^2 f(\varnothing(v), \varnothing(v)) - 2\lambda^2 f(\varnothing(\lambda v), \varnothing(v))$$

$$= f(\lambda v, \lambda v) + \lambda^2 f(v, v) - 2\lambda^2 f(\lambda v, v) = \lambda^2 f(v, v) + \lambda^2 f(v, v) - 2\lambda^2 f(v, v) = 0$$

$$f(\varnothing(v+w) - \varnothing(v) - \varnothing(w), \varnothing(v+w) - \varnothing(v) - \varnothing(w)) \stackrel{?}{=} 0$$

Definición (Aplicación ortogonal)

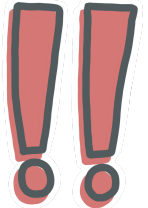
$\varnothing: V \rightarrow V$ es una aplicación ortogonal si:

i) \varnothing es \mathbb{R} -lineal

ii) \varnothing conserva f

Notación

$O(V) = \{ \varnothing: V \rightarrow V, \varnothing \text{ ortogonal} \}$



Propiedades

i) $\varnothing \in O(V) \Rightarrow \varnothing$ biyectiva

Dem.

$$v \in \text{Ker}(\varnothing) \Rightarrow \varnothing(v) = 0 \Rightarrow f(\varnothing(v), \varnothing(v)) = f(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

$\Rightarrow \text{Ker}(\varnothing) = \{0\}$ (inyectiva) $\Rightarrow \dim \text{Im} = n$ (suprayectiva)

ii) $\varnothing \in O(V) \Rightarrow \varnothing^{-1} \in O(V)$

Dem. Trivial

iii) $\varnothing, \psi \in O(V) \Rightarrow \psi \circ \varnothing \in O(V)$

$$\text{Dem. } f((\varnothing \circ \psi)(v), (\varnothing \circ \psi)(w)) = f(\varnothing(\psi(v)), \varnothing(\psi(w))) = f(\psi(v), \psi(w)) = f(v, w)$$

OBS

$(O(V), \circ)$ es un GRUPO (no conmutativo)

Grupos

$(GL(V), \circ)$ (Aplicaciones biyectivas $V \rightarrow V$)

$GL_n(\mathbb{R})$

$O(V) < GL(V)$

$i? < GL_n(\mathbb{R})$

Orientación

B, B' bases de V (espacio real)

$$P = M(B, B') \in GL_n(\mathbb{R}) \implies \begin{cases} |P| > 0 \implies B \text{ y } B' \text{ tienen la misma orientación} \\ |P| < 0 \implies B \text{ y } B' \text{ tienen distinta orientación} \end{cases}$$

Solo hay dos orientaciones para cualquier espacio vectorial

$$\begin{cases} \text{Positiva} \\ \text{Negativa} \end{cases} \quad \{e_1, \dots, e_n\} \text{ positiva} \implies \{-e_1, \dots, e_n\} \text{ negativa}$$

En \mathbb{R}^n , B_c es positiva

$\emptyset \in GL(V)$

$$B = \{v_1, \dots, v_n\}, B' = \{\emptyset(v_1), \dots, \emptyset(v_n)\}$$

$$M(B', B) = M_B(\emptyset) = A \begin{cases} |A| > 0 \implies \emptyset \text{ conserva la orientación} \implies \emptyset \in GL^+(V) \\ |A| < 0 \implies \emptyset \text{ invierte la orientación} \implies \emptyset \in GL^-(V) \end{cases}$$

$$GL(V) = GL^+(V) \cup GL^-(V) \quad \text{Unión disjunta}$$

$$O(V) = O^+(V) \cup O^-(V)$$

Ej: (\mathbb{R}^n, f) e.v.e., $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

$\emptyset: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ simetría en base W y dirección W^\perp (simetría ortogonal respecto de W)

Veamos \emptyset es una aplicación ortogonal.

$$v_1 \in \mathbb{R}^n, v_1 = w_1 + w_1'$$

$$v_2 \in \mathbb{R}^n, v_2 = w_2 + w_2'$$

$$f(\emptyset(v_1), \emptyset(v_2)) = f(w_1 - w_1', w_2 - w_2') = f(w_1, w_2) + f(w_1', w_2')$$

$$f(v_1, v_2) = f(w_1 + w_1', w_2 + w_2') = f(w_1, w_2) + f(w_1', w_2') //$$

$$\cdot n=3: M_B(\emptyset) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \emptyset \in O^-(V)$$

$$\{v_1, v_2, v_3\} \mapsto \{v_1, v_2, -v_3\}$$

Base de \emptyset hiperplano $\implies \emptyset$ simetría especular

↑
simetría

$$M_B(\varnothing) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varnothing \in O^+(V)$$

$$\{v_1, v_2, v_3\} \mapsto \{v_1, -v_2, -v_3\}$$

Base de \varnothing recta \Rightarrow \varnothing simetría axial
 \uparrow
 simetría

Ej: (\mathbb{R}^n, f) e.v.e., $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

$\varnothing: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ proyección en base W y dirección W^\perp (proyección ortogonal respecto de W)

\varnothing no es una aplicación ortogonal (por lo general no es biyectiva)

Propiedades



(V, f) e.v.e., $\varnothing \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$, $A = M_B(\varnothing)$, $C = M_B(f)$

i) $\varnothing \in O(V) \Leftrightarrow A^t C A = C \Leftrightarrow A^t \cdot A = I_n$ (A es ortogonal)
 \uparrow
 si B ortonormal

ii) $\varnothing \in O(V) \Rightarrow \det(\varnothing) = \pm 1$ (pues $(\det(\varnothing))^2 = |A|^2 = |A^t| |A| = |I_n| = 1$)

iii) $\varnothing \in O(V) \Rightarrow \sigma(\varnothing) \subseteq \{1, -1\}$

Dem.

$$\varnothing(v) = \lambda v \xrightarrow{v \neq 0} \|v\|^2 = f(v, v) = f(\varnothing(v), \varnothing(v)) = f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v, v) \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

iv) $\varnothing \in O(V), W \subset_{\varnothing} V \Rightarrow W^\perp \subset_{\varnothing} V$ y $V = W \oplus W^\perp$
 ya lo sabemos

Dem.

$$v \in W^\perp \stackrel{?}{\Rightarrow} \varnothing(v) \in W^\perp$$

$$f(v, w) = 0, \forall w \in W \stackrel{?}{\Rightarrow} f(\varnothing(v), w) = 0, \forall w \in W$$

$\varnothing: V \rightarrow V$ es biyectiva $\Rightarrow \varnothing|_W: W \rightarrow W$ es biyectiva

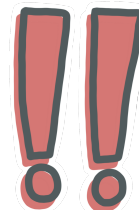
$\Rightarrow w = \varnothing(w')$, para algún $w' \in W$

$$\Rightarrow f(\varnothing(v), w) = f(\varnothing(v), \varnothing(w')) = f(v, w') = 0$$

OBS

f producto escalar $\Rightarrow W^{\perp\perp} = W$

Clasificación de aplicaciones ortogonales



$$n = \dim_{\mathbb{R}} V$$

$$\cdot n=1: (a)^t(a) = 1 \Rightarrow (a^2) = 1$$

$$\Rightarrow O(V) = \{id_V, -id_V\}$$

$\cdot n=2: \emptyset \in O(V)$. $M_B(\emptyset) = A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ es ortogonal, $B = \{v_1, v_2\}$ base ortonormal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^t A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

$$a = \cos \theta, b = \sin \theta, c = \cos \theta', d = \sin \theta', 0 \leq \theta, \theta' \leq 2\pi$$

$$0 = ac + bd = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' = \cos(\theta - \theta') \Leftrightarrow \theta' = \begin{cases} \theta + \frac{\pi}{2} \\ \theta + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cdot \theta' = \theta + \frac{\pi}{2}: c = \cos(\theta') = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta) = -b$$
$$d = \sin(\theta') = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta) = a$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ DIRECTA } (|A| = a^2 + b^2 > 0)$$

$$\cdot \theta' = \theta + \frac{3\pi}{2}: c = \cos(\theta') = \cos(\theta + \frac{3\pi}{2}) = \sin(\theta) = b$$
$$d = \sin(\theta') = \sin(\theta + \frac{3\pi}{2}) = -\cos(\theta) = -a$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ INVERSA } (|A| = -a^2 - b^2 < 0)$$

$$\emptyset \in O^+(V) \Rightarrow M_B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

↑
ortonormal

$$\emptyset \in O^-(V) \Rightarrow M_B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, a^2 + b^2 = 1$$

↓

$$\emptyset \in O^+(V) \Rightarrow p_{\emptyset} = x^2 - 2x \cos \theta + 1 \Rightarrow x = \frac{2 \cos \theta \pm \sqrt{4 \cos^2 \theta - 4}}{2}$$

$\Rightarrow \theta = 0, \pi \Rightarrow$ Solo hay autovalores si $\theta = 0 (id_V)$ o $\theta = \pi (-id_V)$

$$\emptyset \in O^-(V) \Rightarrow p_{\emptyset} = x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = q_{\emptyset} \Rightarrow \emptyset \text{ diagonalizable}$$

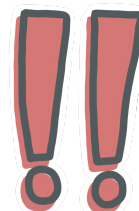
$$\Rightarrow M_{B'}(\emptyset) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B' \text{ ortonormal } (\emptyset \text{ simetría})$$

*

*

$$v) \emptyset \in O(V), v \in V_{\emptyset, 1}, w \in V_{\emptyset, -1} \Rightarrow f(v, w) = 0$$

$$\text{Dem. } f(v, w) = f(\emptyset(v), \emptyset(w)) = f(v, -w) = -f(v, w) \Rightarrow 2f(v, w) = 0 \Rightarrow f(v, w) = 0$$



OBS

$O^+(V)$ siempre son rotaciones (subgrupo de $O(V)$, al componer dos el \det es 1)

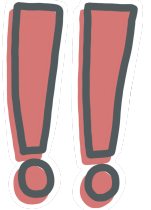
$O^-(V)$ no es subgrupo (al componer dos el \det es 1)

Problema

Encontrar la rotación que surge de componer dos simetrías ortogonales en el plano vectorial euclídeo.

Teorema

13/04/2021



$\emptyset \in O(V) \implies \exists B$ base ortonormal de V tal que :

$$M_B(\emptyset) = I_s \oplus (-I_t) \oplus \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} \cos \theta_t & -\sin \theta_t \\ \sin \theta_t & \cos \theta_t \end{pmatrix}, \begin{matrix} s, t \geq 0, \\ 0 \leq \theta_i < 2\pi, \\ n = s + t + 2m, \\ m \geq 0 \end{matrix}$$

Dem.

Inducción sobre $n = \dim_{\mathbb{R}} V$

• $n=1$: Ya lo hemos visto

$$\dim_{\mathbb{R}} W < n \stackrel{?}{\implies} \dim_{\mathbb{R}} W = n$$

CASO 1: $\lambda = \pm 1 \in \sigma(\emptyset) \implies$ Sea $v_1 \in V_{\emptyset, \lambda}$

$$W = L(v_1) \subset_{\emptyset} V$$

$$V =_{\emptyset} W \oplus W^{\perp}$$

$$\emptyset|_{W^{\perp}} \text{ es ortogonal} \xrightarrow{HI} M_{\underbrace{\{v_1, v_2, \dots, v_n\}}_{\text{Base } W^{\perp}}} = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \begin{array}{c} M(\emptyset|_{W^{\perp}}) \\ \\ \\ \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \begin{array}{c} M(\emptyset|_{W^{\perp}}) \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

Satisface la condición por hipótesis

CASO 2: $\sigma(\emptyset)$ es vacío

$$q_\emptyset = f_1^{a_1} \cdots f_t^{a_t}, \quad f_1, \dots, f_t \in \mathbb{R}[x] \text{ irreducibles de grado } 2$$

Sea $q_{\emptyset, v_1} = f_1 = x^2 + a_1 x + a_0$ En la demostración del teorema espectral vimos que este vector existe.

$$\pi = L(v_1, \emptyset(v_1)) \subsetneq V \left\{ \begin{array}{l} \dim_{\mathbb{R}} \pi = 2 \end{array} \right. \Rightarrow V =_{\emptyset} \pi \oplus \pi^\perp$$

$\emptyset|_\pi, \emptyset|_{\pi^\perp}$ ortogonales

$B_\pi = \{v_1, v_2\}$ ortonormal en π

$B_{\pi^\perp} = \{v_3, \dots, v_n\}$ ortonormal en π^\perp

} HI

$\Rightarrow M_{\underbrace{B_\pi \cup B_{\pi^\perp}}_{\text{ortonormal}}}(\emptyset) = M_{B_\pi}(\emptyset|_\pi) \oplus M_{B_{\pi^\perp}}(\emptyset|_{\pi^\perp})$ es del tipo deseado q.e.d.

• $n=3$: CASO 1: $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right) \in O^+(V)$ ↔ Rotación de ángulo θ con eje $L(v_1)$

CASO 2: $\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right) \in O^-(V)$ ó $\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in O^+(V)$

CASOS PARTICULARES:

• $\emptyset \in O^+(V) \Rightarrow M_B(\emptyset) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right)$

- $\theta=0 \Rightarrow \emptyset = id_V$

- $\theta=\pi \Rightarrow M_B(\emptyset) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \quad L(v_1) = V_{\emptyset, 1}$
 $L(v_2, v_3) = V_{\emptyset, -1} = L(v_1)^\perp$

\emptyset simetría axial ortogonal de eje (base) $L(v_1)$
 y dirección $L(v_1)^\perp$

• $\varnothing \in O^-(V) \Rightarrow M_B(\varnothing) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{array} \right) = M_B(\varnothing_2 \circ \varnothing_1)$

Descomposición de toda aplicación ortogonal inversa como composición de simetría y rotación

- ↳ $\varnothing = \varnothing_2 \circ \varnothing_1$
- ↳ \varnothing_1 giro de eje $L(v_1)$ y de ángulo ϑ
- ↳ \varnothing_2 simetría (especular) ortogonal con dirección $L(v_1)$ y base $L(v_2, v_3) = L(v_1)^\perp$

$M_B(\varnothing) = I_s \oplus (-I_t) \oplus (\dots) \oplus \dots \oplus (\dots)$

t es impar $\Rightarrow M_B(\varnothing) = (-1) \oplus I_s \oplus (-I_{t-1}) \oplus (\dots) \oplus (\dots)$

$= (-1) \oplus C = \underbrace{((-1) \oplus I_{n-1})}_{M_B(\varnothing_2)} \underbrace{((1) \oplus C)}_{M_B(\varnothing_1)}$

\uparrow $|C|=1$ \uparrow \uparrow
 simetría especular rotación

- $\varnothing_1 = \text{id}_V \Rightarrow \varnothing = \varnothing_2$ simetría especular

OBS

$\varnothing \in O^-(V) \Rightarrow \varnothing$ se puede ver como la composición de una simetría especular y una rotación